

УДК 534.08

**ДІАГНОСТУВАННЯ СТРУКТУРНО НЕОДНОРІДНИХ СЕРЕДОВИЩ З  
ГІСТЕРЕЗИСНОЮ КВАДРАТИЧНОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ ТА РЕЛАКСАЦІЄЮ**

С.М. ЛІСОВЕЦЬ, Ю.О. СКРИПНИК

Київський національний університет технологій та дизайну

*Розглянуто розповсюдження пружних хвиль в структурно неоднорідних середовищах з гістерезисною квадратичною нелінійністю та релаксацією. Показано, що розподіл м'яких дефектів-включень по релаксаційним частотам дозволяє контролювати параметри таких дефектів. Наприклад, можна виявити зміну середнього розміру зерна в полікристалічних матеріалах в результаті термічної або механічної обробки (навантаження) цих матеріалів. Також показано, що для вимірювання невеликих змін акустичних параметрів пружної хвилі необхідно застосування високочутливих методів вимірювання, які дають можливість звести до мінімуму вплив власних електричних нелінійних спотворень електронних блоків та схем*

Гістерезисні рівняння стану застосовуються для пояснення явища амплітудно-залежного внутрішнього тертя, як правило, в твердотільних матеріалах із недосконалою пружністю – структурно неоднорідних середовищах [1–3]. Зазвичай, такі гістерезисні рівняння описуються в загальному вигляді безінерційними залежностями виду

$$\sigma = f(\varepsilon, \text{sign}(\dot{\varepsilon}), \text{sign}(\ddot{\varepsilon})) \quad (1)$$

Тут  $\sigma$  – механічна напруга,  $\varepsilon$  – відносна деформація. Така загальна залежність (1) є справедливою на відносно низьких частотах – в низькочастотному діапазоні пружних хвиль, що зондують середовище, яке досліджується.

Так як в рівняння (1) входить лише відносна деформація  $\varepsilon$  та її перша похідна  $\dot{\varepsilon}$ , то рівняння (1) є частотно незалежним, тобто залежність “механічна напруга-відносна деформація” не залежить від частоти. Однак, результати експериментальних досліджень (наприклад, нелінійні втрати та генерація вищих гармонік) показують, що для багатьох полікристалічних металів та гірських порід параметри акустичної нелінійності залежать від частоти (тобто від швидкості  $\dot{\varepsilon}$  зміни відносної деформації  $\varepsilon$ ). Таким чином, в рівняння (1) додається ще один параметр – це перша похідна  $\dot{\varepsilon}$  – і рівняння (1) приймає вигляд

$$\sigma = f(\varepsilon, \dot{\varepsilon}, \text{sign}(\dot{\varepsilon}), \text{sign}(\ddot{\varepsilon})) \quad (2)$$

Основу багатьох гістерезисних рівнянь стану становить реологічна модель структурно неоднорідного середовища, яка показана на рис. 1, що складається з одновимірного ланцюга лінійних пружних елементів та відносно м'яких нелінійних в'язко-пружних дефектів-включень.

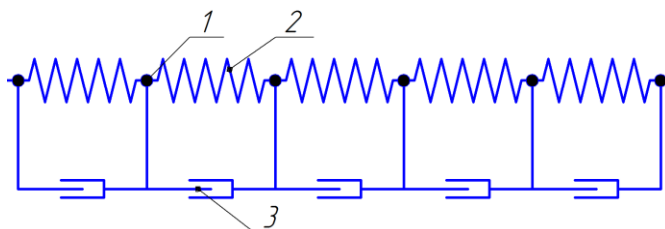


Рис. 1. Реологічна модель структурно неоднорідного середовища:

1 – зосереджена маса; 2 – пружний елемент; 3 – дисипативний елемент

Якщо об'ємна концентрація дефектів-включень невелика і становить не більше  $10^{-6} \dots 10^{-5}$ , то рівняння стану такого структурно неоднорідного середовища описується функцією [4, 5]:

$$\sigma(\epsilon) = E \left( \epsilon - \int_0^1 \int_0^1 R(\epsilon, \omega) N(\epsilon, \omega) d\epsilon d\omega - \int_0^1 \int_0^1 R(\epsilon, \omega) \text{sign}(\epsilon) N(\epsilon, \omega) d\epsilon d\omega \right). \quad (3)$$

Вираз  $R(\epsilon, \omega)$  обчислюється через інтеграл:

$$R(\epsilon, \omega) = \frac{\omega}{\zeta} \int_{-\infty}^{\epsilon} \epsilon' e^{-\omega \epsilon'} d\epsilon'. \quad (4)$$

Тут  $\omega = \zeta E / \eta$  – релаксаційна частота м'якого дефекта-включення,  $N(\epsilon, \omega)$  – функція розподілу м'яких дефектів-включень по відносним пружностям  $\zeta$  (відносно матеріалу основи) та по частотам релаксацій  $\omega$ . Як правило, функція розподілу  $N(\epsilon, \omega)$  має досить складний вигляд, який залежить від багатьох складових. В полікристалічних матеріалах, наприклад, крім багатьох інших чинників, на функцію  $N(\epsilon, \omega)$  впливає розподіл зерна по середнім розмірам.

#### Об'єкти та методи дослідження

Об'єктом дослідження виступають структурно неоднорідні середовища, зокрема, полікристалічні матеріали. Як відомо, основними дефектами, які визначають пружні та непружні властивості твердотільних середовищ, є дислокації. Їх рух та взаємодія із такими дефектами кристалічної решітки, як вакансії, міжвузлові та домішкові атоми в полі пружної хвилі впливають як на коефіцієнт затухання пружної хвилі, так і на швидкість розповсюдження пружної хвилі [6]. Вся сукупність дефектів, яка виникає при розповсюдженні пружних хвиль в таких середовищах, має назву дислокаційного внутрішнього тертя (ДВТ). Найбільш поширеною є так звана дислокаційна теорія поглинання, в основі якої лежить струнна модель дислокацій. Згідно з цією теорією, втрати пружної енергії бувають двох основних типів: лінійні та нелінійні.

Лінійні втрати виникають при невеликих відносних деформаціях  $\epsilon \leq 10^{-8} \dots 10^{-7}$  та не залежать в цьому діапазоні від амплітуди деформації  $\epsilon$  – але залежать від частоти  $f$ , так як є наслідком руху дислокацій у в'язкому середовищі. Це так зване рідинне тертя – класичний вид внутрішнього тертя, коли опір втратам постійний, а сила опору пропорційна швидкості. Такі деформації недостатні для того, щоб відірвати сегменти дислокацій від атомів домішок – вони мають резонансний характер та проявляються в області резонансних частот дислокацій (десятки та сотні мегагерців).

Нелінійні втрати виникають при доволі значних відносних деформаціях  $\epsilon \geq 10^{-7} \dots 10^{-5}$  та залежать в цьому діапазоні від амплітуди деформації  $\epsilon$  – але не залежать від частоти  $f$  (принаймні, для певного діапазону частот). Такі деформації виникають в основному на відносно низьких частотах. Вони визначаються умовами навантаження та розвантаження дислокаційних петель в структурно неоднорідному середовищі.

З ростом частоти деформування, тобто частоти пружної хвилі, “жорсткість” м'яких дефектів-включень зростає, а їх відносна деформація, відповідно, зменшується.

А так як нелінійність структурно неоднорідного середовища обумовлена його нелінійними дефектами-включеннями, то остання також зменшується.

#### Постановка завдання

Постановка завдання полягає в тому, щоб з'ясувати, яким чином розподіл зерна по середнім розмірам в полікристалічних матеріалах впливає на параметри пружної хвилі. Наприклад, при незмінному (константному) розподілу зерен по середнім розмірам в певному діапазоні розмірів, припустимо, від 1 до 10 мкм, параметри пружної хвилі можуть сильно відрізнятися від тих же самих параметрів, але коли зерна по середнім розмірам розподілені по іншому закону. Зокрема, по лінійному закону, гіперболічному закону, закону Гауса, двохмодульному закону, експоненційному закону або якомусь іншому. При моделюванні використовувалися дві основні моделі структурно неоднорідних середовищ: модель гістерезису тертя, де

$$f(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \alpha \epsilon_m \epsilon + \begin{cases} 0,5\beta_1 \epsilon^2 - 0,25\beta_1 + \beta_2 \epsilon_m^2 & \dot{\epsilon} > 0; \\ -0,5\beta_2 \epsilon^2 + 0,25\beta_1 + \beta_2 \epsilon_m^2 & \dot{\epsilon} < 0; \end{cases} \quad (5)$$

та модель гістерезису відриву, де

$$f(\epsilon, \dot{\epsilon}) = \begin{cases} 0,5\gamma_1 \epsilon^2 & \epsilon > 0, \dot{\epsilon} > 0; \\ -0,5\gamma_2 \epsilon^2 + 0,5\gamma_1 + \gamma_2 \epsilon_m^+ \epsilon & \epsilon > 0, \dot{\epsilon} < 0; \\ -0,5\gamma_3 \epsilon^2 & \epsilon < 0, \dot{\epsilon} < 0; \\ 0,5\gamma_4 \epsilon^2 + 0,5\gamma_3 + \gamma_4 \epsilon_m^- \epsilon & \epsilon < 0, \dot{\epsilon} > 0. \end{cases} \quad (6)$$

Тут  $\alpha$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ ,  $\gamma_3$ ,  $\gamma_4$  – коефіцієнти нелінійності;  $\epsilon_m$  – амплітуда відносної деформації.

Для виконання поставленого завдання бралися різні види функції розподілу  $N(\epsilon, \omega)$ . При цьому спочатку було зроблено припущення, що відносна пружність  $\zeta = const$ , а змінюватися може тільки релаксаційна частота  $\omega$ . Іншими словами, вважалось, що пружні властивості всіх зерен в полікристалічному металі однакові  $\zeta = const$ , але, так як їхні розміри різні, то вони мають різні характеристичні частоти коливань (резонансу)  $\omega$ . Тобто фактично функція двох параметрів  $N(\epsilon, \omega)$  перетворювалася на функцію одного параметра  $N(\omega)$ . Крім того, вважалось, що так як середній розмір зерна змінюється, наприклад, від 1 до 10 мкм, то і діапазон зміни релаксаційних частот становить, наприклад, не більше 10 (чим менше зерно, тим більше його релаксаційна частота, і навпаки):

$$\omega_2/\omega_1 \approx 10. \quad (7)$$

Тут  $\omega_2$  – релаксаційна частота зерна з мінімальними розмірами, наприклад, 1 мкм;  $\omega_1$  – релаксаційна частота зерна з максимальними розмірами, наприклад, 10 мкм.

Для незмінного (константного) закону розподілу функція  $N(\omega)$  мала вигляд (рис. 2):

$$N(\omega) = A_H. \quad (8)$$

Тут  $A_H$  – коефіцієнт незмінного (константного) розподілу. Причому і надалі  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .

Для лінійного закону розподілу функція  $N(\omega)$  мала вигляд (рис. 3):

$$N(\omega) = B_L \omega + C_L. \quad (9)$$

Тут  $B_L$ ,  $C_L$  – коефіцієнти лінійного розподілу.

Для гіперболічного закону розподілу функція  $N(\omega)$  мала вигляд (рис. 4):

$$N(\omega) = D_H / \omega. \quad (10)$$

Тут  $D_H$  – коефіцієнт гіперболічного розподілу. Як відомо [5], при такому (тобто зворотно пропорційному) розподілу зерен по релаксаційним частотам структурно неоднорідне середовище має лінійний декремент затухання в діапазоні  $\omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ .

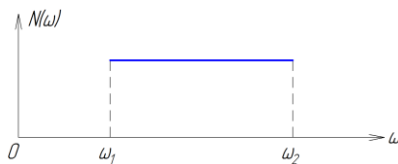


Рис. 2. Незмінний (константний) закон розподілу зерен по частотам релаксації

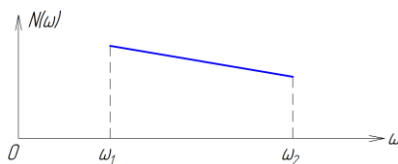


Рис. 3. Лінійний закон розподілу зерен по частотам релаксації

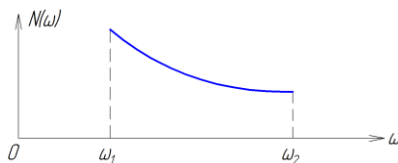


Рис. 4. Гіперболічний закон розподілу зерен по частотам релаксації

### Результати та їх обговорення

Виконувалося моделювання розповсюдження гармонійного сигналу  $\varepsilon_0 \sin(\omega t + \varphi)$  в мідно-цинкових сплавах Л85, Л90, Л95 ГОСТ 15527-2004 в вигляді пакетів з відносними амплітудами  $\varepsilon_0 \approx 10^{-7}$  та  $\varepsilon_0 \approx 10^{-6}$ , тобто співвідношення амплітуд становило 1:10 (це, наприклад, відповідало тиску в середовищі відповідно  $\approx 10 \text{ кН/м}^2$  та  $\approx 100 \text{ кН/м}^2$ ). Причому саме співвідношення 1:10 дотримувалося з великою точністю. Частоти релаксації  $\omega$  бралися такими, що  $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$  та  $\omega_2 = 2\pi \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Відносна пружність дефектів-включень (границь зерен, або ж середовища між зернами) приймалася такою, що дорівнює  $\zeta = 0,01$ .

Зондування середовища виконувалося на шести частотах 1,0 кГц, 1,6 кГц, 2,5 кГц, 4,0 кГц, 6,5 кГц та 10,0 кГц таким чином, щоб співвідношення частот становило приблизно  $\approx 1,6$ . Було отримано, що зміна розподілу зерен по середнім розмірам в полікристалічних матеріалах впливає

на параметри пружної хвилі, зокрема, на відносну зміну швидкості співвідношення  $\Delta c/c$  та на відносну зміну коефіцієнта згасання  $\Delta K/K$ .

Для середовища із незмінним (константним) законом розподілу (8) приймалося, що функція розподілу  $N(\omega) = 2 \cdot 10^{-6}$ . Було отримано (рис. 5), що на вищезгаданих частотах зміна  $\Delta c/c$  та  $\Delta K/K$  має суттєво нелінійний характер. Наприклад, співвідношення  $\Delta c/c$  початку зменшується, потім збільшується, далі знову зменшується. Співвідношення  $\Delta K/K$  спочатку монотонно збільшується, а потім починає зменшуватися. Звісно, для інших параметрів зондування середовища та самого середовища  $\varepsilon_0$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  та інших зміна  $\Delta c/c$  та  $\Delta K/K$  може суттєво відрізнятись, що пояснюється складним характером взаємодії пружної хвилі та структурно неоднорідного середовища.

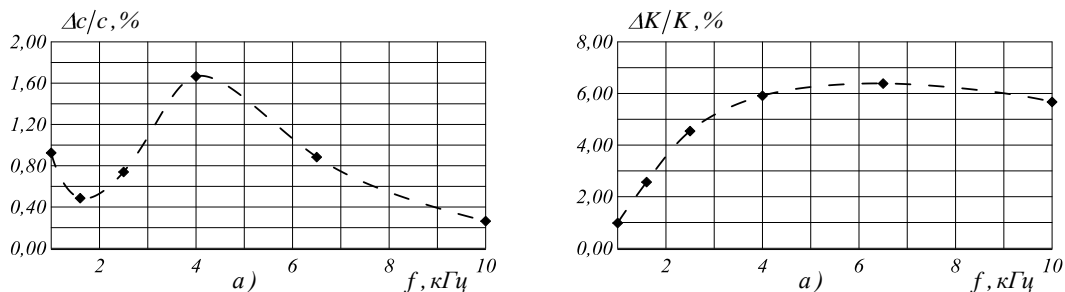


Рис. 5. Залежність  $\Delta c/c$  а) та  $\Delta K/K$  б) від частоти для незмінного (константного) закону розподілу зерен по частотам релаксації

Для середовища із лінійним законом розподілу (9) приймалося (рис. 6), що функція розподілу  $N(\omega) = 2 \cdot 10^{-11} \omega + 10^{-6}$ . Тут зміна  $\Delta c/c$  та  $\Delta K/K$  також мала суттєво нелінійний характер – для співвідношення  $\Delta c/c$  коливальний, для співвідношення  $\Delta K/K$  монотонний.

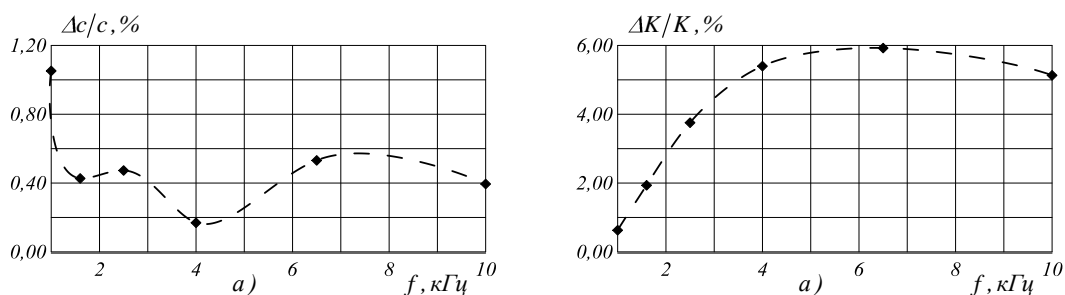


Рис. 6. Залежність  $\Delta c/c$  а) та  $\Delta K/K$  б) від частоти для лінійного закону розподілу зерен по частотам релаксації

Для середовища із гіперболічним законом розподілу (10) приймалося (рис. 7), що функція розподілу  $N(\omega) = 10^{-2}/\omega$ . Зміна  $\Delta c/c$  носила менш коливальний характер, а залежність  $\Delta K/K$  також залишалася монотонною.

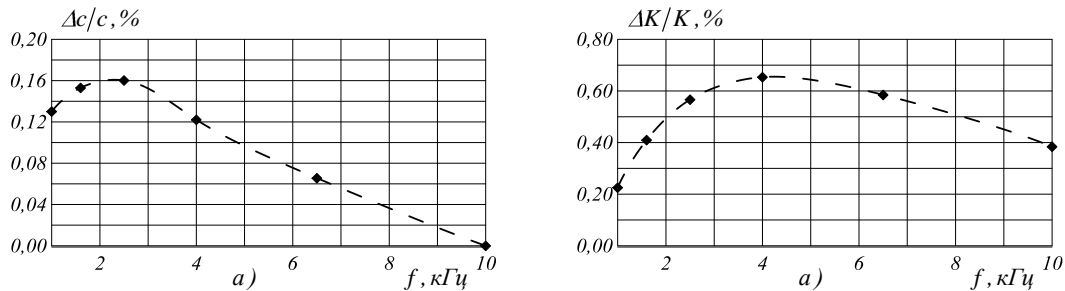


Рис. 7. Залежність  $\Delta c/c$  а) та  $\Delta K/K$  б) від частоти для гіперболічного закону розподілу зерен по частотам релаксації

### Висновки

В результаті виконання моделювання розподілу зерен по середнім розмірам в полікристалічних матеріалах було отримано наступні результати:

1. Значення функції розподілу  $N(\phi) \lesssim 10^{-7}$  призводить до того, що параметри зерен не впливають на пружну хвилю. Тобто, якщо границі зерен або ж середовище між зернами займає малий об'єм, або ж їх відносна пружність наближається до пружності матеріалу-основи, то таке структурно неоднорідне середовище діагностувати (на предмет визначення розподілу середнього розміру зерен) існуючими лінійними або нелінійними акустичними методами неможливо [2-6].

2. Для вимірювання невеликих змін акустичних параметрів пружної хвилі необхідно застосування високочутливих методів вимірювання, які дають можливість звести до мінімуму вплив власних електричних нелінійних спотворень електронних блоків та схем (наприклад, [7] та [8]).

3. До термічної або механічної обробки (навантаження) полікристалічний матеріал має один закон розподілу  $\Delta c/c = \text{fun}_1(\phi)$  та  $\Delta K/K = \text{fun}_2(\phi)$  по частотах, а після їх застосування інший:  $\Delta c/c = \text{fun}_1^*(\phi)$  та  $\Delta K/K = \text{fun}_2^*(\phi)$ . Знімаючи по еталонних зразках закони розподілу  $\Delta c/c$  та  $\Delta K/K$  в залежності від розподілу зерен по середнім розмірам, можна виконати градування цих еталонних зразків, після чого застосовувати отримані градувальні характеристик для аналізу аналогічних матеріалів в умовах промислового виробництва або експлуатації.

### ЛІТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
2. Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А. Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть I // Акустический журнал. – 2003. – Т. 49. – № 3. – С. 405–415.
3. Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А. Волновые процессы в средах с гистерезисной нелинейностью. Часть II // Акустический журнал. – 2003. – Т. 49. – № 4. – С. 529–534.
4. Назаров В.Е., Радостин А.В. Численное моделирование динамических гистерезисов для микронеоднородных сред с несовершенной упругостью и релаксацией // Акустический журнал. – 2006. – Т. 52. – № 4. – С. 514-520.

5. Назаров В.Е., Радостин А.В. Волновые процессы в микронеоднородных упругих средах с гистерезисной нелинейностью и релаксацией // Акустический журнал.– 2005.– Т. 51.– № 2.– С. 280-285.
6. Назаров В.Е. Об амплитудной зависимости внутреннего трения цинка // Акустический журнал.– 2000.– Т. 46.– № 2.– С. 228-233.
7. Патент № 50186. Україна. МПК G01H 7/00. Спосіб вимірювання часу проходження акустичних імпульсів.– Скрипник Ю.О., Лісовець С.М.– Заявл. 15.12.2009; Опубл. 25.05.2010, Бюл. № 10.
8. Патент № 57892. Україна. МПК G01F 23/28. Пристрій для вимірювання нелінійності акустичних характеристик матеріалів.– Скрипник Ю.О., Лісовець С.М.– Заявл. 11.11.2010; Опубл. 10.03.2011, Бюл. № 5.